ECOLE CENTRALE PARIS

Admission en 1ère année au titre du Cycle International

GEOMETRIE

I. Soit E_2 un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé Oxy.

Soit λ un réel donné ; soit C_λ la courbe de E_2 définie par la représentation paramétrique :

$$x = t + \frac{\lambda - \text{sht}}{\text{cht}}$$

$$y = \frac{1 + \lambda\,\text{sht}}{\text{cht}}$$

t est un réel variant dans R

1°) Quelle relation géométrique simple y-a-t-il entre les courbes C_λ et $C_{-\lambda}$?

2°) Déterminer l'ensemble Γ des points des courbes C_λ, lorsque λ varie dans R, dont la tangente est parallèle à l'axe y'Oy.

3°) Déterminer l'ensemble D des points des courbes C_λ, lorsque λ varie dans R, qui ne sont pas des points réguliers.

4°) Construire le graphe de chacune des courbes C_0 et C_2.

5°) Déterminer la normale à la courbe C_λ en un point quelconque M. Déterminer l'enveloppe de la famille des normales à C_λ.

6°) Le paramètre λ est supposé égal à 2. Soit $\mathcal{H}$ la courbe définie par la représentation paramétrique $t \longmapsto (x'(t), y'(t))$. Démontrer que $\mathcal{H}$ admet une représentation paramétrique rationnelle en posant m= sht.

Déterminer le nombre de points d'intersection de $\mathcal{H}$ avec une droite D quelconque. Quelle conclusion y-a-t-il lieu d'en tirer ?

Reconnaître la courbe $\mathcal{H}$.

II. **A** - Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé Oxy, C est l'arc de la lemniscate de Bernoulli définie par son équation polaire :

$$r = \sqrt{k \sin(2\theta)} \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

k est une constante positive donnée ; M est le point de C d'angle polaire θ.

1°) Tracer l'arc de courbe C.

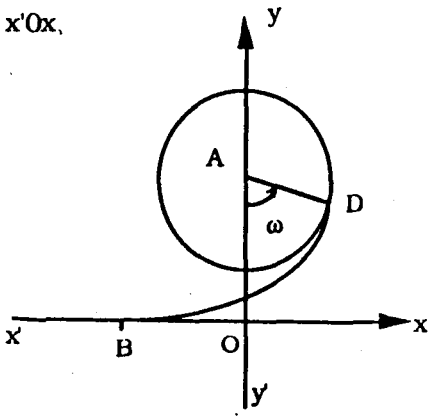
2°) Déterminer l'angle polaire $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{MT})$ de la tangente $\overrightarrow{MT}$ en M à C. Exprimer le rayon de courbure ρ en M en fonction de r. Etudier ses variations le long de C.

B - Soit toujours, dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé Oxy, un cercle Γ de rayon R et de centre le point A de coordonnées (o,a) avec 0<R<a.

Soit BD un arc C' de lemniscate ; B est situé sur x'0x de coordonnées (b,0), et D est un point du cercle Γ repérée par l'angle $\omega = (\overrightarrow{Ay'}, \overrightarrow{AD})$, $0 < \omega \le \frac{\pi}{2}$.

L'arc C' de lemniscate est supposé être tangent en B et D à la droite et au cercle respectivement et avoir en ces points même rayon de courbure (c'est-à-dire ∞ en B, R en D).

Les données sont le cercle et la droite x'0x, donc les réels a et R ; les inconnues sont b, ω et le coefficient k de la lemniscate.



1°) A l'aide des résultats de la partie A, déterminer l'angle $(\overrightarrow{Bx}, \overrightarrow{BD})$. En déduire les expressions de b et du coefficient k en fonction de ω. *

2°) Etudier les variations des fonctions $\omega \longmapsto b(\omega)$ et $\omega \longmapsto k(\omega)$ lorsque ω varie dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$. **

Déterminer ω de façon à ce que le coefficient k soit minimum. Calculer b et k pour cette valeur de ω.

FIN

* il y a deux réponses possibles ...

** laquelle doit servir au 2° ?